5 "Решение"несовместных систем линейных уравнений (систем, которые не имеют решения)

Исхитрись-ка мне добыть
То-Чаво-Не-Может-Быть!
Запиши себе названье,
Чтобы в спешке не забыть!
Леонид Филатов. Про Федота-стрельца

5.1 Постановка проблемы

Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x - y = -1 \\ x - 2y = -2 \\ y = 2 \end{cases}$$

Не сложно понять, что данная система не имеет решения. Т.е. не существует чисел x и y, которые удовлетворяют всем трем уравнениям. Там не менее некоторые жизненные ситуации дают нам именно такие системы.

Например, представим, что у нам есть три эксперта. И каждый из них дает свою экспертную оценку в виде уравнения. В данном случае получается, что эксперты не могут придти к общему мнению. Поэтому, необходимо выработать некоторые методики нахождения компромиссов между экспертами.

В терминах систем линейных уравнений это означает, что мы должны найти x и y, которые в некотором смысле можно назвать решением системы. Именно тем, каким могут дать данные "некоторые смыслы"мы будем разбираться на данной лекции.

5.2 Игнорирование лишних уравнений

Самый простой способ получить некоторое "решение"исходной системы - это убрать одной из уравнений, и тогда мы получаем систему которая будет иметь единственное решение. Но возникает вопрос - какое из уравнений убирать. Математического ответа на этот вопрос быть не может. С точки зрения математики все уравнения равноправны.

Если иметь в виду жизненную интерпретацию с экспертами, то можно отбросить то уравнение, которое получено от эксперта, чьему мнению мы доверяем в меньшей степени.

Если убрать первое уравнение, то поучаем систему

$$\begin{cases} x - 2y = -2 \\ \quad y = 2 \end{cases}$$

И ее решением является $x_1 = 2, y_1 = 2$.

Если убрать второе уравнение, то получаем систему

$$\begin{cases} x - y = -1 \\ \quad y = 2 \end{cases}$$

И ее решением является $x_2 = 1, y_2 = 2$.

Если убрать третье уравнение, то получаем

$$\begin{cases} x - y = -1 \\ x - 2y = -2 \end{cases}$$

И ее решением является $x_3 = 0, y_3 = 1$.

Итак, любое из этих решений является "решением"исходной системы при условии игнорирования одного из уравнений.

5.3 Нахождение среднего решения

В предыдущем методе мы отбрасывали лишние уравнения. Для исходной системы (2 неизвестных, 3 уравнения) мы имели мы получили три разных решения при отбрасывания одного из трех уравнений. Одним из вариантов равноправного учета всех уравнений является расчет среднего арифметического значения всех решений полученных в предыдущем методе. В нашем случае получаем:

$$\begin{matrix} x_4 = \frac{x_1+x_2+x_3}{3} = \frac{2+1+0}{3} = 1 \\ y_4 = \frac{y_1+y_2+y_3}{3} = \frac{2+2+1}{3} = \frac{5}{3} \end{matrix}$$

Однако, и предложенный метод среднего арифметического не является единственным. Например, можно рассчитать среднее геометрическое

$$\begin{matrix} x_5 = \sqrt[3]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3} = \sqrt[3]{2 \cdot 1 \cdot 0} = 0 \\ y_5 = \sqrt[3]{y_1 \cdot y_2 \cdot y_3} = \sqrt[3]{2 \cdot 2 \cdot 1} = \sqrt[3]{4} \end{matrix}$$

Однако в том случае, если у нас будет система большим числом неизвестных и с большим числом уравнений, то число различных вариантов игнорирования лишних уравнений сильно возрастает. Например, в общем случае, для системы из 10 уравнений и 5 неизвестных число вариантов равняется числу сочетаний из 10 по 5

$$= C_{10}^{5} = \frac{10!}{(5!)^2} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 30240$$

Ясно, что ручной перебор всех указанных вариантов невозможен. Для расчетов необходимо использовать компьютер.

5.4 Метод наименьших квадратов

Рассмотрим еще один метод, который в отличие от предыдущего легко рассчитывается и для больших систем. Продемонстрируем метод для нашей исходной системы. Идея заключается в следующем. Введем функции:

$$\delta_1(x, y) = x - y + 1$$

$$\delta_2(x, y) = x - 2y + 2$$

$$\delta_3(x, y) = y - 2$$

И объединим их в вектор в 3-х мерном пространстве

$$\vec{\delta}(x, y) = \begin{pmatrix} \delta_1(x, y) \\ \delta_2(x, y) \\ \delta_3(x, y) \end{pmatrix}$$

Положение данного вектора зависит от значений x и y. Если мы меняем значения x и y, то и меняется положение вектора $\vec{\delta}(x, y)$ в пространстве. В идеале нам бы хотелось найти такую пару x_0 и y_0, чтобы указанный вектор $\vec{\delta}(x_0, y_0)$ попал в точку $(0, 0, 0)$. Это бы означало, что

$$\delta_1(x_0, y_0) = x_0 - y_0 + 1 = 0$$

$$\delta_2(x_0, y_0) = x_0 - 2y_0 + 2 = 0$$

$$\delta_3(x_0, y_)) = y_0 - 2 = 0$$

т.е. x_0 и y_0 - решение исходной системы.

Однако, как мы уже поняли, что у исходной системы решения нет. Поэтому, мы попытаемся найти такие x_0 и y_0, чтобы $\vec{\delta}(x_0, y_0)$ был бы как можно ближе к точке $(0, 0, 0)$.

Напомним, что длина вектора находится по формуле

$$|\vec{\delta}(x, y)| = \sqrt{\delta_1(x, y)^2 + \delta_2(x, y)^2 + \delta_3(x, y)^2}$$

. Поэтому, нам необходимо найти такие x и y, чтобы величина

$$\sqrt{\delta_1(x,y)^2 + \delta_2(x,y)^2 + \delta_3(x,y)^2}$$

стала минимальной. Заметим, что в силу того, что квадратный корень - монотонно возрастающая функция, мы можем искать такие x и y, чтобы величина

$$\delta_1(x,y)^2 + \delta_2(x,y)^2 + \delta_3(x,y)^2$$

стала минимальной.

Далее для краткости не будем писать (x,y) у $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ и $\vec{\delta}$, понимая, что все эти величины зависят от конкретных значений x и y.

Не трудно видеть, что

$$|\vec{\delta}(x,y)|^2 = \delta_1(x,y)^2 + \delta_2(x,y)^2 + \delta_3(x,y)^2 =$$
$$= (\delta_1(x,y), \delta_2(x,y), \delta_3(x,y)) \begin{pmatrix} \delta_1(x,y) \\ \delta_2(x,y) \\ \delta_3(x,y) \end{pmatrix} = (\vec{\delta}(x,y))^t \vec{\delta}(x,y)$$

Далее, запишем нашу исходную систему в виде

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Заметим, что

$$\vec{\delta} = A\vec{x} - \vec{b}$$

Итак, как же найти такие x и y, чтобы значение $|\vec{\delta}(x,y)|^2$ было бы минимально возможным? Оказывается такие x и y получаются из решения следующей системы

$$A^t A\vec{x} = A^t\vec{b}$$

Данное утверждение мы не будем доказывать, т.к. простое доказательство требует использования понятия производной.

В нашем случае имеем

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

или после перемножения матриц

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Решая данную систему получаем $x_0 = 1$, $y_0 = \frac{5}{3}$.

5.5 Построение прямой наименее отклоняющейся от множества точек

Приведенный выше метод наименьших квадратов решения несовместной системы линейных уравнений позволяет решать следующую практическую задачу. Предположим мы делаем ежедневные наблюдения за некоторым процессом (например, за курсом некоторой валюты) и фиксируем наши наблюдения в виде таблицы

День	1	2	3	4	5
Значение	0	2	2	3	3

Можем ли спрогнозировать каким будет значение на 6-й день?

Наш прогноз может быть построен на следующем соображении. Попытаемся зависимость между днем и значением записать в виде формулы

$$y = ax + b$$

где x - день, y - значение (валюты) в данный день.

Геометрически это означает, что у нас есть точки $(1, 0)$, $(2, 2)$, $(3, 2)$, $(4, 3)$, $(5, 3)$ и мы пытаемся провести одну прямую через все эти точки.

К сожалению, это - невозможно. Но мы можем попытаться провести прямую наименее отклоняющаяся от указанных точек. Такую прямую мы можем найти записав следующую систему

$$\begin{cases} 0 = a + b \\ 2 = 2a + b \\ 2 = 3a + b \\ 3 = 4a + b \\ 3 = 5a + b \end{cases}$$

В данном случае - неизвестными будут a и b. Запишем систему в матричном виде

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Записываем новую систему в соответствии с методом наименьших квадратов:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Перемножим матрицы и в результате получим

$$\begin{pmatrix} 55 & 15 \\ 15 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37 \\ 10 \end{pmatrix}$$

В результате получаем $a = \frac{7}{10}$, $b = \frac{1}{10}$.

И прямая имеет следующий вид

$$y = \frac{7}{10}x + \frac{1}{10}$$

Таким образом, прогноз на 6 день получается

$$\frac{7}{10}6 + \frac{1}{10} = \frac{43}{10} = 4.3$$