7 Задачи линейного программирования

7.1 Формулировка задач

См. материалы на сайте

7.2 Пример задач

См. материалы на сайте

7.3 Геометрическая интерпретация

Предположим у нас имеется следующая задача линейного программирования (ЗЛП):

$$\begin{cases} 2x - y \geq -4 \\ x - 3y \leq 2 \\ x + y \leq 10 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ f(x, y) = x + 3y \to max \end{cases}$$

Визуально данную задачу можно представить следующим образом. У нас есть комната, стены которой образуют пятиугольник, сформированный соответствующими пятью прямыми (Рис 1).

$$\begin{array}{l} 2x - y = -4 \\ x - 3y = 2 \\ x + y = 10 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{array}$$

Над комнатой сделан потолок, который представляет собой плоскость, которая задается в трехмерном пространстве уравнением

$$z = x + 3y$$

Образом, потолок лежит не горизонтально, а имеет некоторый уклон. И в разных точках комнаты расстояние до потока - различное.

Наша задача заключается в том, чтобы найти такую точку в комнате, в которой расстояние от пола до потолка - максимальное.

Интуитивно понятно, что действовать надо следующим образом. Находясь в любой точке комнаты надо посмотреть на потолок и определить, в каком направлении он возрастает. Затем начать двигаться по комнате в данном направлении. В какой-то момент мы упремся в стену. Тут нам надо снова посмотреть на потолок и определить в каком направлении по стене (направо или навело) он возрастает. После чего начать двигаться в данном направлении. В какой-то момент мы упремся в угол комнаты. Данная точка и будет искомой.

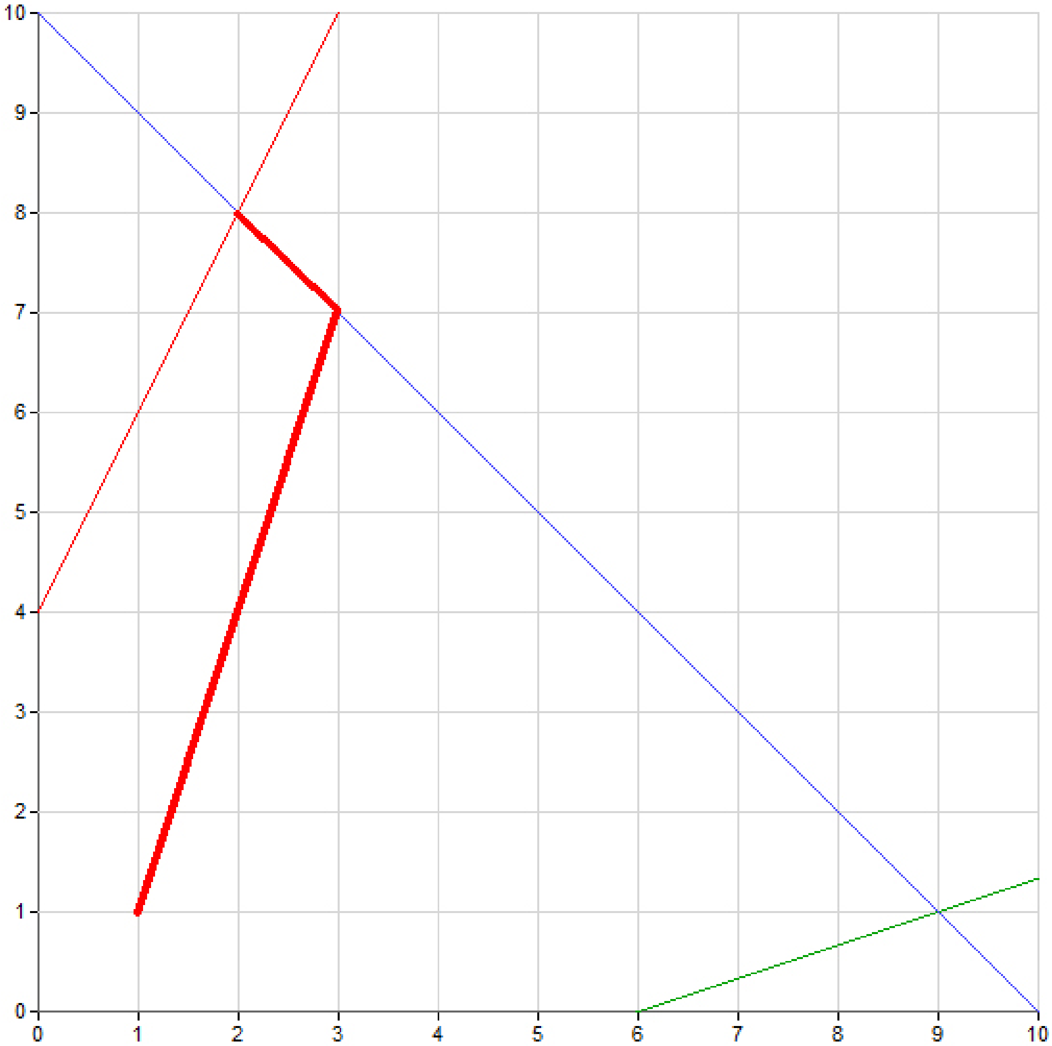

Рис. 1: Комната - пятиугольник и движение по ней

Теперь разберем этот процесс более формально.

Предположим у нас есть некоторая начальная точка, например $A_0 = (1, 1)$. В данной точке функций принимает значение

$$f(1, 1) = 1 + 3 * 1 = 4.$$

Необходимо определить, как изменять начальную точку A_0, чтобы значение функции f возрастало.

Оказывается, для любой линейной функции $h(x, y) = ax + by$ и начальной точки $A_0 = (x_0, y_0)$ это можно сделать следующим образом. Рассмотрим точку

$$A_1 = (x_0 + \lambda a, y_0 + \lambda b),$$

где a, b - коэффициенты из функции h и $\lambda > 0$ - произвольное положительное число. Тогда

$$\begin{gathered} h(x_0 + \lambda a, y_0 + \lambda b) = a(x_0 + \lambda a) + b(y_0 + \lambda b) = \\ = ax_0 + by_0 + \lambda(a^2 + b^2) = h(x_0, y_0) + \lambda(a^2 + b^2) > h(x_0, y_0) \end{gathered}$$

т.к. очевидно, что

$$\lambda(a^2 + b^2) > 0$$

Таким образом из начальной точки $A_0 = (x_0, y_0)$ нам необходимо сдвигаться в сторону вектора $\alpha = (a, b)$.

В рассматриваемом примере новая точка

$$A_1 = (1 + \lambda, 1 + 2\lambda)$$

.

Значение λ можно найти из условия, что точка A_1 должна принадлежать одной из прямых, которые ограничивают область. А данном случае не трудно понять, что первой прямой, которую мы "встретим когда будет двигаться из точки $A_0 = (1, 1)$ по направлению $\alpha = (1, 3)$ будет прямая

$$x + y = 10$$

Следовательно

$$(1 + \lambda) + (1 + 3\lambda) = 10$$

откуда

$$\lambda = 2$$

В принципе, для дальнейших вычислений точное значение λ нам не требуется. Т.к. мы понимаем, что находимся где-то на прямой

$$x + y = 10$$

И теперь нам надо определить в каком направлении по данной прямой нам двигаться.

Интуитивные соображения нам подсказывают, что двигаться надо в том направлении по прямой, в котором угол между нашим исходным направлением и прямой наибольший. В данном случае получаем, что двигаться надо по убыванию x и возрастанию y.

Более строго это можно показать так. Подставим $y = 10 - x$ в $f(x, y)$, получим функцию от одной переменной

$$r(x) = f(x, 10 - x) = x + 3(10 - x) = 30 - 2x$$

Данная функция возрастает при убывании x. Нам необходимо направление возрастания функции, т.к. в исходной ЗЛП мы ищем максимум.

В результате мы попадаем в точку, которая определяется пересечением прямых

$$\begin{cases} 2x - y = -4 \\ x + y = 10 \end{cases}$$

Получаем искомые значения $x = 2$, $y = 8$