7 Линейные пространства

7.1 Определение

Понятие линейного пространства включается практически в любой курс линейной алгебры. Однако зачастую, и особенно в курсе для студентов гуманитарного профиля, глубокий смысл данного понятия не раскрывается. В результате для учащихся остается не ясным, зачем вообще это понятие было введено, и зачем было потрачено столько времени на его изучение.

К сожалению, из-за ограниченности времени, в данном курсе мы также не сможем раскрыть всю глубину с смысл линейных пространств в полном объеме. Попытаемся это частично сделать, когда будем говорить о примерах линейных пространств.

Линейным (или векторным) пространством называется множество некоторых объектов V (далее эти объекты будем называть **векторами**), для которых определены две операции:

- Операция умножения произвольное вектора $\alpha \in V$ на произвольное число a, в результате которой получается некоторый вектор

$$\beta = a\alpha \in V$$

- Операция сложения двух произвольных векторов $\alpha \in V$ и $\beta \in V$, в результате которой получается некоторый вектор

$$\gamma = \alpha + \beta \in V$$

При этом данные операции удовлетворяют следующим свойствам:

1. Для любых векторов $\alpha, \beta \in V$ выполняется

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha$$

2. Для любых векторов $\alpha, \beta, \gamma \in V$ выполняется

$$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$$

3. Существует вектор $\theta \in V$, такой что для любого вектор $\alpha \in V$ выполняется

$$\alpha + \theta = \theta + \alpha = \alpha$$

Вектор θ называется нулевым.

4. Для любого вектора $\alpha \in V$ существует вектор $\beta \in V$, такой что
$$\alpha + \beta = \beta + \alpha = \theta$$
Вектор β называется обратным к вектору α и обозначается $\beta = -\alpha$

5. Для любого вектора $\alpha \in V$ выполняется
$$1\alpha = \alpha$$
Т.е. при умножении вектора на число 1, получается тот же самый вектор.

6. Для любого вектора $\alpha \in V$ и любых чисел a, b выполняется
$$(ab)\alpha = a(b\alpha)$$

7. Для любых векторов $\alpha, \beta \in V$ и любого числа a выполняется
$$a(\alpha + \beta) = a\alpha + a\beta$$

8. Для любого вектора $\alpha \in V$ и любых чисел a, b выполняется
$$(a + b)\alpha = a\alpha + b\alpha$$

Замечания:

- Не следует отождествлять (или путать) понятие вектора как элемента линейного пространства и понятия вектора из геометрии (или физики), как направленного отрезка в пространстве (или изображения скорости, силы и т.п.). В данном случае, вектор - это новый абстрактный объект.

- Не следует отождествлять (или путать) операции умножения и сложения векторов с операциями сложения у чисел. В силу того, что вектор - это новый объект, то и операции с ними тоже новые. В частности, в свойстве 8. фактически присутствуют две разных операции, каждая из которых обозначается символом $+$. В выражении $a + b$ знак $+$ суть сложение чисел. В выражении $a\alpha + b\alpha$ знак $+$ суть сложение векторов. Формально, можно было ввести специальные символы для обозначения сложения векторов и умножения на число, однако, для краткости, так не поступают.

- Свойство 5. позволяет говорить об операции вычитании векторов. Под выражением $\alpha - \gamma$ можно понимать $\alpha + (-\gamma)$, т.е. мы складываем вектор α и вектор, обратный к вектору γ

- Не трудно доказать, что нулевой вектор θ единственный в каждом конкретном линейном пространстве. Действительно, пусть существуют для нулевых вектора $\theta_1, \theta_2 \in V$ с указанными свойствами, тогда
$$\theta_1 = \theta_1 + \theta_2 = \theta_2$$
В равенствах мы два раза воспользовались свойством 3., первый раз для θ_2, второй раз для θ_1.

- Не трудно доказать, что для любого вектора α выполняется
$$0\alpha = \theta$$

7.2 Примеры линейных пространств

1. Набор чисел. Рассмотрим множество V, состоящее из всевозможных упорядоченных троек чисел (x_1, x_2, x_3), где x_i - произвольные числа. Введем умножение тройки (x_1, x_2, x_3) на число a следующим образом:
$$a(x_1, x_2, x_3) = (ax_1, ax_2, ax_3)$$
При этом, умножение ax_i - суть обыкновенное умножение чисел.

Введем сложение двух троек (x_1, x_2, x_3) и (y_1, y_2, y_3) следующим образом:
$$(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$$
При этом, сложение $x_i + y_i$ - суть обыкновенное сложение чисел.

Можно доказать, что введенное множество относительно двух введенных операций образует линейное пространство. Для этого надо проверить, что выполняются все 8 указанных свойств. Это делается не очень сложно, поэтому проверим, например, свойство 7.

Нам даны два набора (x_1, x_2, x_3) и (y_1, y_2, y_3), а также число a. Тогда, с одной стороны
$$a((x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3)) = a(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) =$$
$$= (a(x_1 + y_1), a(x_2 + y_2), a(x_3 + y_3)) = (ax_1 + ay_1, ax_2 + ay_2, ax_3 + ay_3)$$
С другой стороны:
$$a(x_1, x_2, x_3) + a(y_1, y_2, y_3) = (ax_1, ax_2, ax_3) + (ay_1, ay_2, ay_3) =$$
$$= (ax_1 + ay_1, ax_2 + ay_2, ax_3 + ay_3)$$

Получается, что

$$a((x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3)) = a(x_1, x_2, x_3) + a(y_1, y_2, y_3)$$

Таким образом, свойство 7. доказано.

2. Направленные отрезки Зафиксируем некоторую точку на плоскости. Рассмотрим множество отрезков, которые своим одним концом имеют данную точку, а другой конец лежит где-то в плоскости.

Определим операцию умножения отрезка α на число a путем удлинения отрезка α в a раз. При этом, если $a < 0$, то откладываем удлиненный отрезок в противоположном направлении.

Определим операцию сложения двух отрезков по правилу параллелограмма (http://www.terver.ru/slogvecpravparal.php).

Не сложно показать, что все 8 свойств выполняются для данного множества отрезков относительно введенных операций. Это делается "в лоб", используя правила элементарной геометрии. Это позволит утверждать, что указанное множество с указанными операциями является линейным пространством.

Подчеркнем фундаментальную разницу между первым и вторым примерами линейных пространств. Внешне они оба напоминают школьное понятие вектора, в котором иногда вектор обозначался как направленный отрезок, а иногда своими координатами - упорядоченным набором чисел.

В данном случае эти примеры пространств независимы. Если первое полностью определяется из алгебраических свойств, то второе - из геометрических.

3. Множество полиномов Рассмотрим отрезок $[0, 1]$ и множество всех функций вида:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

где a_i - произвольные числа. Такие функции называются полиномами.

Введем операцию умножения полинома $f(x)$ на число a следующим образом:

$$g(x) = af(x) = a(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0) = \\ = (aa_n) x^n + (aa_{n-1}) x^{n-1} + \cdots + (aa_1) x + (aa_0)$$

Введем операцию сложения полиномов

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

и

$$g(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

следующим образом:

$$h(x) = f(x)+g(x) = (a_n+b_n)x^n+(a_{n-1}+b_{n-1})x^{n-1}+\cdots+(a_1+b_1)x+(a_0+b_0)$$

Не трудно показать, что множество полиномов относительно относительно введенных операций образует векторное пространство.

Данные примеры показывают, что **очень разные по своей природе объекты (наборы чисел, отрезки, функции и т.д.) могут являться векторным пространством.**

Это дает основной мотив к изучению линейных пространств: если мы получим некоторое утверждение которое справедливо для любого линейного пространства, то данное утверждение будет справедливо и для каждой конкретной реализации линейного пространства - наборов чисел, отрезков, функций и т.д. Таким образом, если мы докажем одну теорему для линейных пространств, то автоматически мы получаем бесконечно много теорем для каждой из конкретной реализаций линейного пространства.

Другой мотив заключается в том, что некоторые свойства линейных пространств ярко проявляются в некоторых его конкретных реализациях. Например, когда мы говорим про отрезки, вполне естественно рассмотреть углы между отрезками, и, тем самым, определить угол между векторами. Таким образом, мы можем говорить о том, что можно измерять углы между функциями, что само по себе не очевидно.

7.3 Базис. Координаты

Пусть нам даны вектора $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ и числа $a_1, \dots, a_n$, тогда выражение

$$a_1\alpha_1 + \cdots + a_n\alpha_n$$

называется **линейной комбинацией векторов** $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

Если вектор β, такой что

$$\beta = a_1\alpha_1 + \cdots + a_n\alpha_n$$

то говорим, что вектор β **линейным образом выражается** через вектора $\alpha_1, \dots, \alpha_n$

Пусть θ - нулевой вектор в пространстве. Вектора $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ называются **линейно независимы** если выражение

$$\theta = a_1\alpha_1 + \cdots + a_n\alpha_n$$

возможно только при $a_1 = \cdots = a_n = 0$.

Если вектора $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ такие что, существуют числа $a_1, \dots, a_n$, не все одновременно равные нулю, для которых

$$\theta = a_1\alpha_1 + \dots + a_n\alpha_n$$

то говорим, что вектора $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ - **линейно зависимы**.

Базисом в линейном пространстве V называется набор векторов $B = \{\epsilon_1, \dots, \epsilon_n\}$, такой что:

1. Вектора $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ - линейно независимы

2. Любой вектор $\alpha \in V$ линейным образом выражается через вектора $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, т.е. существуют числа $a_1, \dots, a_n$, такие что

$$\alpha = a_1\epsilon_1 + \dots + a_n\epsilon_n$$

Числа $a_1, \dots, a_n$ **называются координатами вектора** α в базисе $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$

Число n (количество базисных векторов) называют **размерностью пространства** V.

Замечания:

1. В векторном пространстве может существовать бесконечно много различных базисов.

2. Все эти базисы состоят из одинакового числа векторов. Поэтому, определение размерности корректно.

3. Координаты вектора существенным образом зависят от того, в каком базисе они берутся. Меняем базис - поменяются и координаты.

7.4 Связь с линейными системами

Возникает вопрос - как понять является ли конкретный набор векторов $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ - базисом? Оказывается, ответ на этот вопрос сводится к построению некоторой системы линейных уравнений и проверки, всегда ли данная система имеем решение.

В качестве рассмотрим пространство состоящее из всех наборов чисел длины 2 $V = \{(x_1, x_2)\}$ относительно операций введенных ранее.

Пусть имеются три вектора $\epsilon_1 = (r_1, r_2)$, $\epsilon_2 = (s_1, s_2)$ и $\alpha = (a_1, a_2)$. И нам необходимо найти числа x, y такие что:

$$(a_1, a_2) = \alpha = x\epsilon_1 + y\epsilon_2 = x(r_1, r_2) + y(s_1, s_2) = (xr_1 + ys_1, xr_2 + ys_2)$$

Заметим, что данное выражение можно записать в следующем виде:

$$(a_1, a_2) = (x, y) \begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ s_1 & s_2 \end{pmatrix}$$

Или в более привычном матричном виде

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 & s_1 \\ r_2 & s_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Таким образом, можно сделать важный вывод: поиск чисел x и y сводится к решению системы 2-х линейных уравнений с двумя неизвестными.

Пользуясь этой идеей мы сможем описать:

1. Процедуру проверки того, что набор векторов является базисом.
2. Процедуру поиска координат вектора в конкретном базисе.

7.5 Проверка базиса

Напомним, что нулевым вектором в рассматриваемом пространстве является $\theta = (0, 0)$

Нам даны два вектора $\epsilon_1 = (r_1, r_2)$ и $\epsilon_2 = (s_1, s_2)$ для которых необходимо понять, являются ли они базисом или нет.

По определению необходимо проверить:

1. Если числа x и y такие, что

$$x\epsilon_1 + y\epsilon_2 = x(r_1, r_2) + y(s_1, s_2) = \theta = (0, 0)$$

то обязательно выполняется $x = y = 0$.

2. Для любого ли вектора $\alpha = (a_1, a_2)$ существуют числа x и y, такие что

$$x\epsilon_1 + y\epsilon_2 = x(r_1, r_2) + y(s_1, s_2) = (a_1, a_2) = \alpha$$

Использую связь с системами линейных уравнений данные утверждения можно переформулировать следующим образом:

1. Единственным решением системы

$$\begin{pmatrix} r_1 & s_1 \\ r_2 & s_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

является

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. Для любых чисел (a_1, a_2) система

$$\begin{pmatrix} r_1 & s_1 \\ r_2 & s_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

имеет решение.

Использую свойства систем линейных уравнений и матриц, можно сказать, что оба указанных условия выполнены тогда и только когда матрица

$$\begin{pmatrix} r_1 & s_1 \\ r_2 & s_2 \end{pmatrix}$$

обратима.

Действительно, в этом случае мы имеем

1. Числа x, y определяются однозначно равными нулям

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 & s_1 \\ r_2 & s_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. Для любых a_1, a_2 однозначно определяются некоторые x, y

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 & s_1 \\ r_2 & s_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Далее, матрица обратима тогда и только тогда, когда ее определитель не равен нулю.

Таким образом мы получаем простой **способ проверки являются ли вектора** $\epsilon_1 = (r_1, r_2)$ и $\epsilon_2 = (s_1, s_2)$ **базисом**?

Необходимо:

1. Составить матрицу A, в которой вектора записаны "по столбцам"

$$A = \begin{pmatrix} r_1 & s_1 \\ r_2 & s_2 \end{pmatrix}$$

2. Если $det(A) \neq 0$, то ϵ_1, ϵ_2 образуют базис. Если $det(A) = 0$, то ϵ_1, ϵ_2 не являются базисом.

7.6 Связь: вектор, базис и координаты

Теперь мы можем сформулировать и решить следующие задачи

1. Даны: базис $\epsilon_1 = (r_1, r_2)$ и $\epsilon_2 = (s_1, s_2)$ и координаты a_1, a_2. Найти: вектор $\alpha = (x, y)$, который имеет заданные координаты a_1, a_2 в указанном базисе:

$$(x, y) = \alpha = a_1\epsilon_1 + a_2\epsilon_2 = a_1(r_1, r_2) + a_2(s_1, s_2)$$

Задача решается очевидным образом подстановкой чисел $a_1, a_2, r_1, r_2, s_1, s_2$ в правую часть. Решение данной задачи получается однозначное.

2. Даны: базис $\epsilon_1 = (r_1, r_2)$ и $\epsilon_2 = (s_1, s_2)$ и вектор $\alpha = (a_1, a_2)$. Необходимо найти координаты x, y данного вектора в данном базисе:

$$(a_1, a_2) = \alpha = x\epsilon_1 + y\epsilon_2 = x(r_1, r_2) + y(s_1, s_2)$$

Задача решается путем решения системы линейных уравнений:

$$\begin{pmatrix} r_1 & s_1 \\ r_2 & s_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Решение данной задачи получается однозначное.

3. Даны вектор $\alpha = (a_1, a_2)$ и координаты c_1, c_2. Найти базис $\epsilon_1 = (x_1, y_1), \epsilon_2 = (x_2, y_2)$, в котором вектор α будет иметь координаты c_1, c_2:

$$(a_1, a_2) = \alpha = c_1\epsilon_1 + c_2\epsilon_2 = c_1(x_1, y_1) + c_2(x_2, y_2)$$

В данном случае мы опять имеем имеем систему из 2-х линейных уравнений относительно 4-х неизвестных x_1, x_2, y_1, y_2

$$\begin{cases} a_1 = c_1x_1 + c_2x_2 \\ a_2 = c_1y_1 + c_2y_2 \end{cases}$$

Данная система дополняется еще один условием, которое гарантирует, что $\epsilon_1 = (x_1, y_1), \epsilon_2 = (x_2, y_2)$ - базис, а именно, что

$$det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} = x_1y_2 - x_2y_1 \neq 0$$

Любые числа x_1, x_2, y_1, y_2, которые удовлетворяют всем трем условиям определят искомый базис. Таких наборов чисел может быть бесконечно много. Таким образом, в данной задаче ответ определен неоднозначно.