8 Линейные динамические системы. Собственные числа и вектора матрицы

8.1 Линейные динамические системы

Пусть у нас имеется два игрока, каждый из которых имеет некоторый капитал. Игроки взаимодействуют друг с другом и с каждым ходом их капитал меняется.

Обозначим:

x_s - капитал 1-ого игрока в момент времени s.

y_s - капитал 2-ого игрока в момент времени s.

Можем считать, что капитал может принимать как положительные, так и отрицательные значения, что означает долг игрока.

Предположим, что игроки взаимодействуют следующим образом:

$$\begin{cases} x_{s+1} = x_s + \frac{1}{2}x_s - \frac{1}{2}y_s \\ y_{s+1} = y_s - x_s \end{cases}$$

Интерпретировать данную систему можно следующим образом. С каждым ходом, первый игрок увеличивает свой имеющийся капитал x_s на половину имеющегося капитала $\frac{1}{2}x_s$, при этом он теряет честь своего капитала, равной половине капитала второго игрока $-\frac{1}{2}y_s$.

Второй игрок самостоятельно свой капитал не увеличивает, а лишь с каждым ходом теряет сумму, равной капиталу первого игрока $-x_s$.

Перепишем систему в матричной форме.

$$\begin{pmatrix} x_{s+1} \\ y_{s+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_s \\ y_s \end{pmatrix}$$

Предположим нам известно начальное значение (в нулевой момент времени):

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Тогда мы можем найти значения (x_s, y_s) во все последующие моменты времени. Найдем (x_1, y_1):

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Найдем (x_2, y_2):

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$$

Далее аналогичным образом можно найти (x_s, y_s) при $s = 2, 3, 4, \ldots$. Заметим, что значения (x_s, y_s) можно найти несколько иначе. Например:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

Аналогичным образом можно найти, что:

$$\begin{pmatrix} x_s \\ y_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^s \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

Далее для краткости обозначим:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Наша основная задача - понять, как будет эволюционировать система, узнать, какими будут значения (x_s, y_s) при больших s. Например, какими будут значения (x_{100}, y_{100})? Из предыдущей формулы видно, что:

$$\begin{pmatrix} x_{100} \\ y_{100} \end{pmatrix} = A^{100} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

Поэтому, нам необходимо возвести матрицу A в степень 100, что является очень трудоемким занятием!

Далее мы постараемся разобраться, как можно найти (x_{100}, y_{100}) не занимаясь возведением матрицы A в степень 100.

8.2 Собственные числа и собственные вектора

Предположим, что нам (некоторым удивительным образом) удалось найти число λ и вектор

$$\nu = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

такие что

$$A\nu = \lambda\nu$$

Т.е. после умножения матрицы A на вектор ν получается вектор, который пропорционален вектору ν в λ раз. Другими словами, матрица A растягивает вектор ν, если $|\lambda| > 1$ или сжимает его, если $0 < |\lambda| < 1$. Если $\lambda < 0$, то вектор при этом отражается относительно начала координат.

Число λ называется **собственным числом** матрицы A. Вектор ν называется **собственным вектором** матрицы A, соответствующим собственному числу λ.

Собственные числа и вектора очень полезны для решения нашей задачи.

А именно, рассмотрим, как будет вести себя динамическая система, если начальным собственный будет собственный вектор ν:

$$\begin{pmatrix} x_s \\ y_s \end{pmatrix} = A^s\nu = A^{s-1}A\nu = A^{s-1}(\lambda\nu) = \lambda A^{s-1}\nu = \\ = \lambda A^{s-2}A\nu = \lambda A^{s-2}(\lambda\nu) = \lambda^2 A^{s-2}\nu = \\ = \dots = \lambda^s\nu = \lambda^s \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

Таким образом, для того, чтобы найти (x_{100}, y_{100}) при начальном векторе (v_1, v_2) достаточно найти λ^{100}, что во много раз проще, чем искать A^{100}.

Однако остается два вопроса:

1. Как найти собственные числа и собственные вектора.

2. Как найти (x_s, y_s) при условии, что начальный вектор не является собственным вектором.

1. Поиск собственных чисел и собственных векторов. Рассмотрим на примере матрицы

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Нам необходимо найти число λ и ненулевой вектор ν

$$\nu = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

такие что

$$A\nu = \lambda\nu$$

Выполним эквивалентные преобразования

$$A\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$
$$A\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$(A - \lambda E)\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Докажем, что из этот следует, что

$$det(A - \lambda E) = 0$$

Действительно, предположим, что

$$det(A - \lambda E) \neq 0$$

Следовательно, матрица $A - \lambda E$ - обратима. Поэтому

$$\nu = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = (A - \lambda E)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Получили противоречие, т.к. ν - ненулевой вектор.

Поэтому

$$det(A - \lambda E) = 0$$

т.е.

$$det \begin{pmatrix} \frac{3}{2} - \lambda & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

В результате мы получаем квадратное уравнение

$$(\frac{3}{2} - \lambda)(1 - \lambda) - \frac{1}{2} = 0$$

После раскрытия скобок получаем

$$2\lambda^2 - 5\lambda + 2 = 0$$

В результате мы получаем два решения

$$\lambda_1 = 2$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}$$

Для каждого из собственных чисел можно найти соответствующий собственный вектор. Для $\lambda_1 = 2$ ищем

$$\nu_1 = \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix}$$

из условия

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} - 2 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 - 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

что эквивалентно
$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Получили систему линейных уравнений относительно неизвестных v_{11}, v_{12}. Данная система имеет бесконечное число решений, нам достаточно взять любое ненулевое решение. Например:

$$\nu_1 = \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Аналогично для $\lambda = \frac{1}{2}$ находим

$$\nu_2 = \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2. Поиск (x_s, y_s) при условии, что начальный вектор не является собственным вектором. Итак, мы имеем два собственных вектора ν_1 и ν_2. Нетрудно видеть, что эти вектора образуют базис, поэтому произвольный вектор
$$\gamma = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$
может быть выражен через ν_1 и ν_2:

$$\gamma = a_1\nu_1 + a_2\nu_2$$

Следовательно:

$$\begin{pmatrix} x_s \\ y_s \end{pmatrix} = A^s \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = A^s(a_1\nu_1 + a_2\nu_2) = a_1A^s\nu_1 + a_2A^s\nu_2 = a_1\lambda_1^s\nu_1 + a_2\lambda_2^s\nu_2$$

8.3 Задания

Найти собственные числа и собственные вектора следующих матриц.

$$\begin{pmatrix} 1,5 & -0,5 \\ -0,5 & 1,5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0,5 & -1,5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0,3 & -0,2 \\ -0,1 & 0,4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$