9 Теория графов. Операции с графами

9.1 Определения графов. Виды графов

В данном разделе мы познакомимся с новым математическим объектом - **графом** Строго определения мы давать не будем. Определение будет, скорее, визуальное. **Неориентированным графом** будем назвать множество точек и множество линий, соединяющие друг с другом некоторые из данных точек. Точки также называют **вершинами** графа, а линии - **ребрами** графа. Обычно множество вершин обозначается через V и множество ребер через E. В этом случае граф G можно определить как пару $G = (V, E)$. Например, на Рис. 1 изображен граф G_1, с четырьмя вершинами $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ и ребрами $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$

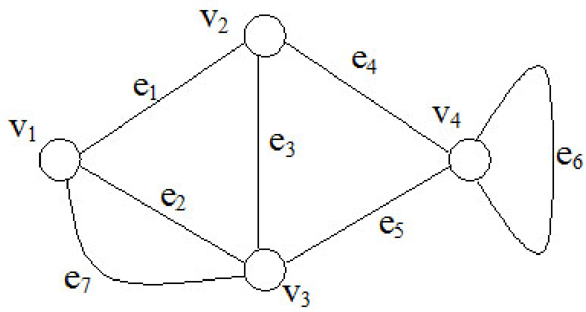

Рис. 1: Неориентированный граф

Ребра графа могут иметь начало и конец. В этом случае граф называется **ориентированным**. На Рис. 2 изображен ориентированный граф G_2.

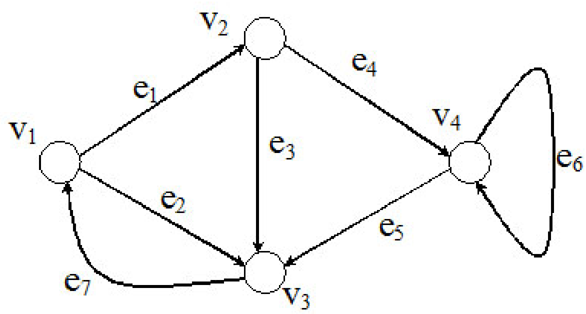

Рис. 2: Ориентированный граф

Кроме того, вершины и ребра графа могут быть "нагружены"дополнительной информацией и пометками. На Рис. 3 изображен граф с числовыми метками на ребрах. Числовые метки на ребрах можно интерпретировать, как пропускную способность ребер. На Рис. 4 изображен граф с метками

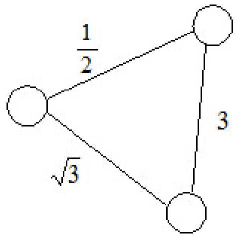

Рис. 3: Граф с числовыми метками на ребрах

$+$ и $-$ на ребрах. Данные метки можно интерпретировать как положительные или отрицательные отношения между вершинами. Такие графы называют знаковыми графами.

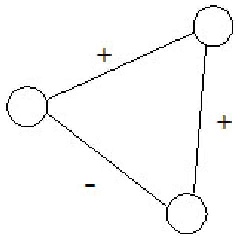

Рис. 4: Знаковый граф

На Рис. 5 изображен граф с метками в вершинах и на ребрах. Подобные графы называются конечными автоматами. Они используются для моделирования вычислительных процессов.

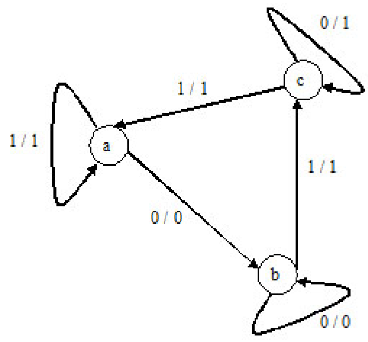

Рис. 5: Конечный автомат

Графы являются очень удобным инструментом для моделирования различным явлений и процессам. Поэтому графы имеют большое прикладное значение. Об использовании графов для решения различных прикладных задач будут посвящены следующие лекции. А в этой лекции мы изучим графы с алгебраической точки зрения.

9.2 Задание графов матрицами

Прежде всего, рассмотрим как можно описывать графы при помощи матриц. Граф, состоящий из n вершин, можно задать матрицей$n \times n$ заполненной целыми неотрицательными числами. Это делается следующим образом: занумеруем некоторыми образом вершины от 1 до n. Далее, если из вершины с номером i идет одно ребро в вершину с номером j, то в ячейку с номером (i, j) ставим 1, если между вершинами i и j нет ребер, то то в ячейку с номером (i, j) ставим 0. Если из вершины с номером i идет s ребер в вершину с номером j, то в ячейку с номером (i, j) ставим s.

Например, неориентированный граф G_1, изображенный на Рис. 1, задается матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ориентированный граф G_2, изображенный на Рис. 2, задается матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Заметим, что матрицы, которые задают неориентированные графы, всегда симметричный относительно главной диагонали.

9.3 Операции с графами

Графы являются некоторым новым абстрактным объектом. Мы может рассмотреть операции над данными объектами.

Далее будет рассмотрена серия операций, которые преобразуют одни графы в другие.

1. **Добавление вершины**. К любому графу можно добавить одну вершину, не соединенную с другими вершинами ребрами (Рис. 6).

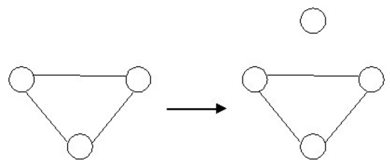

Рис. 6: Добавление вершины

2. **Удаление несвязной вершины**. Если в графе есть вершина, которая не связана ребрами с другими вершинами, то данную вершину можно удалить из графа (Рис. 7).

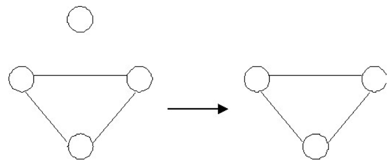

Рис. 7: Удаление несвязной вершины

3. **Добавление ребра**. Любые две вершины можно соединить ребром (Рис. 8).

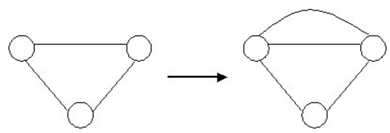

Рис. 8: Добавление ребра

4. **Удаление ребра**. Любое ребро можно удалить из графа (Рис. 9).

Набор операций 1.-4. составляет **полную систему операций**. При помощи данных операций можно из любого графа получить любой другой. Действительно, если сначала в исходном графе можно удалить все ребра применением операции 4. Далее, если во втором графе большее числе вершин, чем в первом графе, то можно добавить необходимые вершины при помощи операции 1. Если во втором графе меньшее число вершин, то лишние вершины можно удалить при помощи операции 2. Очевидно, что это возможно, т.к. после удаления всех ребер, все вершины становятся несвязными. Затем можно добавить необходимые ребра при помощи операции 3. Заметим, что приведенные выше метод преобразования одного графа в другой при помощи операций 1.-4. в общем случае не является оптимальным.

5. **Разбиение ребра**. Любое ребро можно "разбить"путем добавления на него новую вершину (Рис. 10).

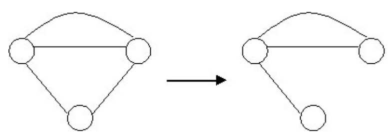

Рис. 9: Добавление ребра

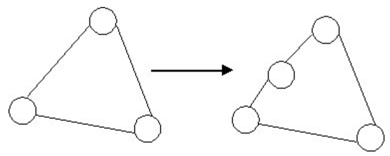

Рис. 10: Разбиение ребра

6. **Расщепление вершины**. Любую вершину можно расщеплять на две. При этом часть ребер (в том числе и ноль) остается у исходной вершины, а оставшиеся ребра идут у новую вершину. То какие ребра оставлять у исходной вершины решаем мы сами. На Рис. 11 представлен пример расщепления вершины 2 в исходном графе. Появляется новая вершина 4. При этом ребро $(1, 2)$ в исходном графе остается и в итоговом графе, а ребро $(3, 2)$ в исходном графе становится ребром $(3, 4)$ в итоговом графе.

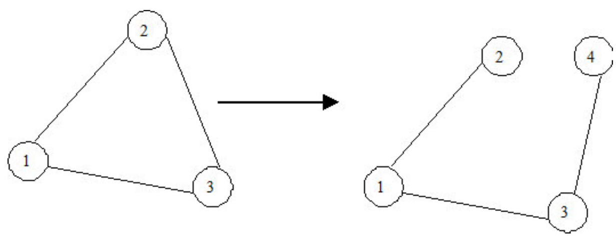

Рис. 11: Расщепление вершины

7. **Склейка вершин**. Любые две вершины можно склеить в одну. При этом все ребра, которые вели в две указанные вершины теперь ведут в одну вершину. На Рис. 12 представлена склейка вершин 2 и 4.

8. **Возведение графа в степень**. Пусть у нас имеется граф G_1 с множеством вершин V и множеством ребер E. Можно считать, что если у графа есть вершины 1 и 2, соединенные ребром, то из вершины 1 можно попасть в вершину 2 за один ход. Таким образом, ребра описывают о возможностях перехода из вершины в вершину за один ход. Если при этом вершина 1 соединена ребром с вершиной 3, то из вершины 2 можно попасть в вершину 3 за два хода. Кроме того, из вершины 1 за два хода можно двумя способами попасть в саму себя. Первый способ - пройти по

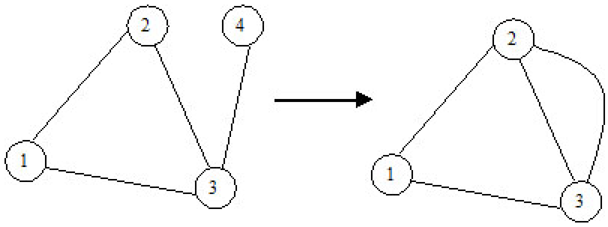

Рис. 12: Склейка вершин

пути 1,2,1, второй способ - пройти по пути 1,3,1. Возведением в квадрат графа G_1 называется граф $G_2 = G_1^2$ с тем же множеством ребер V, при этом между двумя вершинами v_1 и v_2 в графе G_2 есть ребро в том и только том случае, если в графе G_1 из вершины v_1 можно попасть в вершину v_2 за два хода. На Рис. 13 представлен пример возведения графа возведения графа в квадрат.

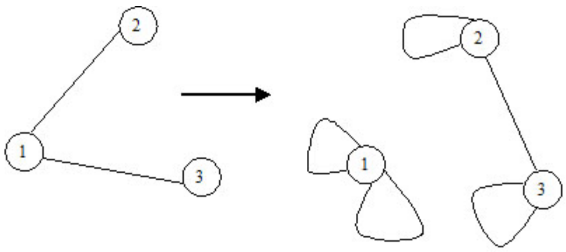

Рис. 13: Возведение неориентированного графа во вторую степень

Заметим еще одно важное свойство: возведение графа в квадрат согласовано с возведением в квадрат соответствующих матриц. На Рис. 13 исходный граф G_1 задается матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Граф $G_2 = G_1^2$ на Рис. 13 задается матрицей

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2$$

Аналогичным образом задается возведение графа в любую натуральную степень s. При этом согласование с возведением в степень соответствующих матриц сохраняется.

В том случае, если исходный граф был ориентированным, то при переходах из вершины в вершину необходимо учитывать направление ребер. Например, если из вершины 3 в вершину 1 направлено ребро, но из вершины 1 нет ребра в вершину 3, то за один ход из вершины 3 можно попасть в вершину 1, но из 1 в 3 за один ход попасть нельзя. На Рис. 14 представлен пример возведения в квадрат ориентированного графа G_3. В случае ориентированных графов опять же возведение графа

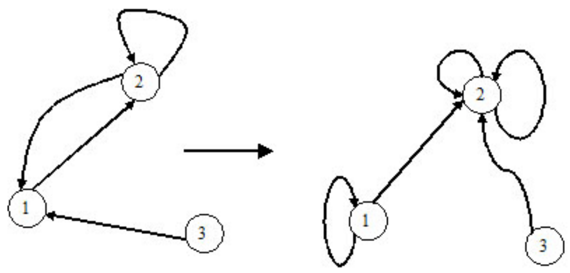

Рис. 14: Возведение ориентированного графа во вторую степень

в квадрат согласовано с возведением в квадрат соответствующих матриц. Для графов из Рис 14 имеем

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2$$

9. **Произведение графов**. Пусть у нас имеются графы $G_1 = (V_1, E_1)$

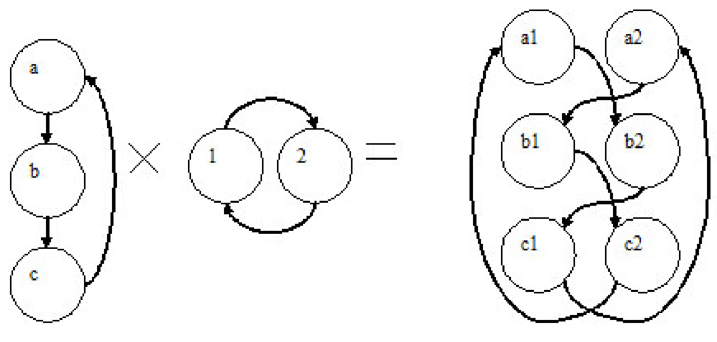

Рис. 15: Произведение ориентированных графов

и $G_2 = (V_2, E_2)$, произведением графов G_1 и G_2 называется граф

$$G_3 = (V_3, E_3) = G_1 \times G_2$$

. Множество вершин V_3 состоит из всех пар (v, v'), где v принадлежит V_1 и v' принадлежит V_2. В графе G_3 есть ребро от вершины (v_1, v_1') к вершине (v_2, v_2') в том, и только том случае, если графе G_1 есть ребро от v_1 к v_2 и в графе G_2 есть ребро от v_1' к v_2'. На Рис. 15 представлен пример произведения двух ориентированных графов.

9.4 Вопросы

1. Верно ли что умножение графов коммутативно, т.е. для любых графов G_1 и G_2
$$G_1 \times G_2 = G_2 \times G_1$$

2. Подумайте, как из матриц исходных графов получится матрица графа, который является произведением данных графов.