

11 Знаковые графы. Меры баланса в знаковых графах.

11.1 Знаковые графы. Сбалансированные графы

Данный раздел посвящен моделированию отношений дружбы и вражды в малых группах при помощи теории графов. Предположим, что у нас есть группа из n человек. Некоторые из них знакомы друг с другом, некоторые - нет. Людей будем обозначать вершинами графа, если два человека знакомы, то соответствующие вершины соединяются ребром.

Далее, знакомые друг с другом люди могут либо дружить, либо враждовать. Если два человека дружат, то ребро, которое соединяет соответствующие вершины, отметим знаком $+$. Если два человека враждуют, то ребро, которое соединяет соответствующие вершины, отметим знаком $-$.

Пусть у нас есть группа из 3-х людей, знакомых друг с другом, и рассмотрим всевозможные варианты их дружбы и вражды. Получается четыре варианта: Рис. 1 - Рис 4. (оставшиеся варианты получаются перестановкой людей).

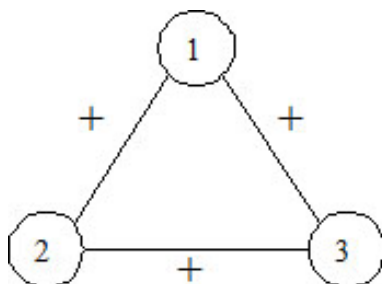


Рис. 1: Все дружат

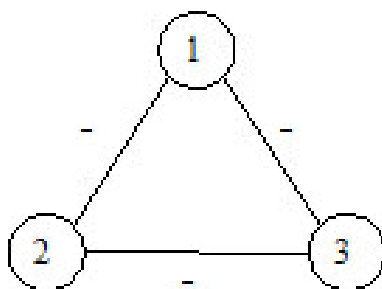


Рис. 2: Все враждуют

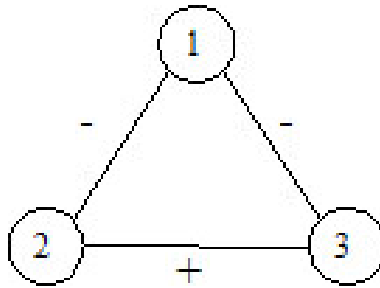


Рис. 3: Двое дружат, но враждуют с третьим

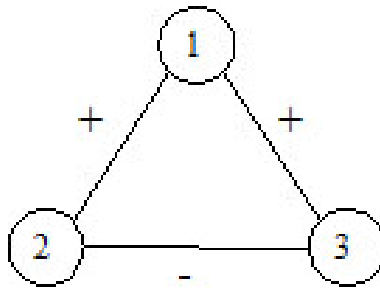


Рис. 4: Двое враждуют, но дружат с третьим

Зададимся вопросом, какие из указанных вариантов являются сбалансированными (гармоничными).

Очевидно, сбалансированным является вариант на Рис. 1, т.к. мы видим дружную компанию из 3-х человек.

Также сбалансированным является вариант на Рис. 3, т.к. 2-ой и 3-ий "дружат против" 1-ого. По-другому это можно охарактеризовать фразой "враг моего врага - мой друг".

Вариант на Рис. 2 сбалансированным не является. Это можно объяснить следующим образом. Вражда между 2-ым и 3-им мешает им объединиться в борьбе с 1-ым. Или то, что 2-ой вредит 1-ому является благом для 3-ого, что противоречит тому, что 2-ой должен вредить 3-ему.

Вариант на Рис. 4 также не сбалансированный. Хотя 1-ой дружит и со 2-ым, и с 3-им, но собраться вместе они не могут, т.к. 2-ой враждует с 3-им.

Математически варианты 1 и 3 отличаются от 2 и 4, тем, что четность при перемножении $+$ и $-$ получается разная.

Для варианта 1 имеем: $(+1)(+1)(+1) = +1$

Для варианта 3 имеем: $(+1)(-1)(-1) = +1$

Для варианта 2 имеем: $(-1)(-1)(-1) = -1$

Для варианта 4 имеем: $(+1)(+1)(-1) = -1$

Перейдем к формальным определяем.

Цепью в графе называется последовательность

$$v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, \dots, v_s, e_s, v_{s+1}$$

где v_1, \dots, v_{s+1} - вершины графа и e_i - ребро, которое соединяет вершины v_i и v_{i+1} .

Цепь, в которой первая вершина совпадает с последней, т.е. $v_1 = v_{s+1}$, называется **замкнутой**.

Циклом в графе называется замкнутая цепь, в которой каждая вершина, кроме первой и последней, встречается только один раз.

Знаковым графом называется неориентированный граф, на каждом ребре которого стоит отметка $+$ или $-$.

Цепь (цикл) в знаковом графе называется **положительным**, если произведение знаков ребер данного пути (цепи, цикла) - положительно, в противном случае **Цепь, (цикл)** называется **отрицательным**.

Знаковый граф называется **сбалансированным**, если любой цикл данного графа положительный.

Вероятно, данное определение является не совсем понятным, однако большую ясность внесет следующая теорема.

Теорема (Харахи). Следующие утверждения эквивалентны:

1. G - сбалансированный граф.
2. Любые две цепи между вершинами u и v имеют одинаковый знак.
3. Множество вершин V графа G можно разбить на два подмножества A и B (одно из множеств быть и пустым), таких что:
 - a) ребра, соединяющие вершины из A с вершинами из B имеют отрицательный знак.
 - b) ребра, соединяющие вершины из A друг с другом, и ребра, соединяющие вершины из B друг с другом, имеют положительный знак.

Доказывать данную теорему мы не будем.

Наиболее наглядным является 3 свойство. По сути, оно утверждает следующее. Всех людей в группе, которая описывается сбалансированным графом, можно разбить на две подгруппы. Внутри каждой из подгрупп люди или не знакомы, или дружат. А люди из разных групп или незнакомы, или враждуют. Таким образом, данную группу можно разбить на две враждующие подгруппы, но внутри каждой из подгрупп люди дружат.

Кроме того, свойство 3 дает простой инструмент проверки, является ли граф сбалансированным. Для этого необходимо двигаться по ребрам от одной вершины к другой каждый раз оставаясь в том же множестве, если ребро имеет знак $+$, или переходить в противоположное множество, если ребро имеет знак $-$. Если в результате граф удалось разложить указанным способом на два множества, то он сбалансированный. Если в какой-то момент возникло противоречие, граф - не сбалансированный.

Граф на Рис. 1. является сбалансированным. Для него $A = \{1, 2, 3\}$, B - пустое.

Граф на Рис. 3. является сбалансированным. Для него $A = \{1\}$, $B = \{2, 3\}$.

Если попытаться граф на Рис. 2. разложить на два множества, то мы потерпим неудачу. Т.к. Если 1 принадлежит A , то 2 обязано принадлежать B , и 3 должна принадлежать B . Но 2 и 3 не могут вместе принадлежать B , т.к. между ними знак $-$.

Также у нас не получится разложить граф на Рис. 3. Действительно, если 1 принадлежит A , то 2 и 3 также обязаны принадлежать B . Но 2 и 3 не могут принадлежать одному множеству, т.к. между ними знак $-$. Следовательно, данный граф не является сбалансированным.

Свойство 2 говорит о следующем. Если граф сбалансированный, то для каждой пары вершин u и v мы можем однозначно сказать враждуют соответствующие люди или дружат. Для этого достаточно взять любой путь, соединяющий данные вершины и вычислить его знак. При этом не важно, какой путь брать, т.к. по теореме знак будет получаться все время один и тот же.

11.2 Меры баланса

В предыдущем разделе мы рассмотрели свойства сбалансированных графов. Однако данное свойство является неустойчивым. Достаточно в сбалансированном графе поменять один знак, и он сразу перестанет быть сбалансированным. Докажите, почему это так.

Но если в несбалансированном графе поменять один знак, то он не обязательно станет регламентированным. Приведите примеры несбалансированных графов, в которых замена знака на одном ребре делает его сбалансированным, а замена знака на другом ребре не делает его сбалансированным. Также можно показать, что если произвольным образом на неориентированном графе расставить $+$ и $-$, то с большей вероятностью у нас получится несбалансированный граф.

Все это говорит о том, что с одной стороны баланс на графе крайне "хрупок а с другой стороны нам требуется инструмент анализа свойств

несбалансированных графов.

Мера сбалансированности будет находиться из следующей идей: 1. Найдем отношение числа положительных циклов в графе к числу всех циклов. Если граф сбалансированный, то каждый цикл положительный и данное отношение будет равно 1. Если в графе нет ни одного положительного цикла, то данное отношение будет равно 0. Все промежуточные значения лежат между 0 и 1. 2. Необходимо учитывать длины циклов, т.к. чем длиннее цикл, то тем более слабая связь устанавливается между элементами. Например, в цикле длины три, по сути, каждый знаком с каждым. В цикле длины, например, равной 12, всех людей можно разбить на пары. И люди из данных пар знакомы друг с другом только по цепочке из 5 человек.

Итак, через t_k обозначим число циклов длины k в графе G . Ясно, что $t_k = 0$ при всех $k > n$, где n - число вершин графа, т.к. не цикле не может быть вершин больше, чем в самом графе.

Через p_k обозначим число положительных циклов длины k в графе G .

Введем меру баланса для графа G следующим образом:

$$b(G) = \frac{\sum_{k \geq 3} \frac{1}{k} p_k}{\sum_{k \geq 3} \frac{1}{k} t_k}$$

Заметим, что обе суммы имеют конечное число ненулевых слагаемых, т.к. при $k > n$ $p_k = t_k = 0$

Рассмотрим примеры вычисления $b(G)$.

Пусть G - граф с Рис. 1. Тогда $t_3 = 1$ и $t_k = 0$, при $k \neq 3$, т.к. в данном графе только один цикл и он имеет длину 3. Далее, $p_3 = 1$, т.к. данный цикл длины 3 положительный и $p_k = 0$, при $k \neq 3$. Следовательно

$$b(G) = \frac{\frac{1}{3} * 1}{\frac{1}{3} * 1} = 1$$

Пусть G - граф с Рис. 2. Тогда $t_3 = 1$ и $t_k = 0$, при $k \neq 3$, т.к. в данном графе только один цикл и он имеет длину 3. Далее, $p_3 = 0$, т.к. данный цикл длины 3 отрицательный и $p_k = 0$, при $k \neq 3$. Следовательно

$$b(G) = \frac{\frac{1}{3} * 0}{\frac{1}{3} * 1} = 0$$

Рассмотрим граф на Рис. 5. Данный граф имеет два цикла длины 3: 1, 2, 3 и 1, 3, 4; и один цикл длины 4: 1, 2, 3, 4. Поэтому, $t_3 = 2$, $t_4 = 1$, и

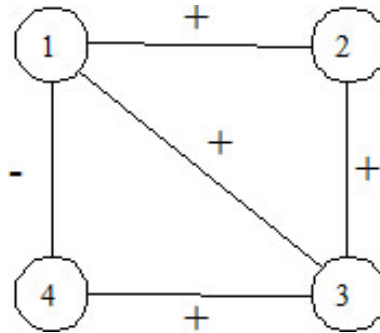


Рис. 5: Знаковый граф

$t_k = 0$, при $k > 4$. Также данный граф имеет только один положительный цикл длины 3: 1, 2, 3. Поэтому, $p_3 = 1$ и $p_k = 0$, при $k > 3$. Получаем:

$$b(G) = \frac{\frac{1}{3} * 1}{\frac{1}{3} * 2 + \frac{1}{4} * 1} = \frac{4}{11}$$

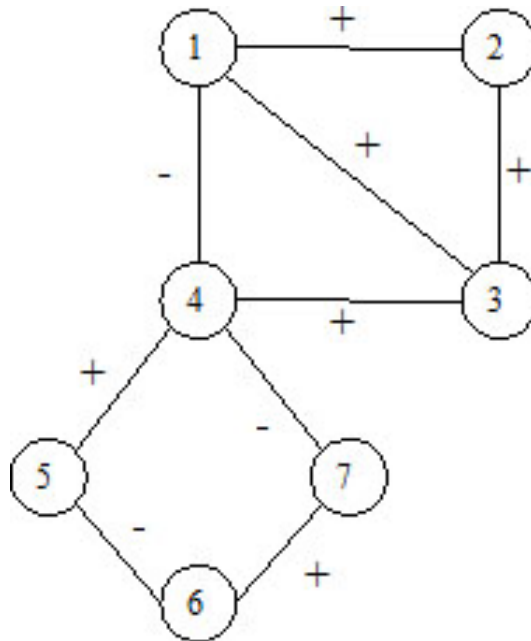


Рис. 6: Знаковый граф

Рассмотрим граф на Рис. 6. Данный граф имеет два цикла длины 3: 1, 2, 3 и 1, 3, 4; и два цикла длины 4: 1, 2, 3, 4 и 4, 5, 6, 7. Поэтому, $t_3 = 2$, $t_4 = 2$, и $t_k = 0$, при $k > 4$. Также данный граф имеет один положительный цикл длины 3: 1, 2, 3, и один положительный цикл длины 4: 4, 5, 6, 7.

Поэтому, $p_3 = 1$, $p_4 = 1$ и $p_k = 0$, при $k > 4$. Получаем:

$$b(G) = \frac{\frac{1}{3} * 1 + \frac{1}{4} * 1}{\frac{1}{3} * 2 + \frac{1}{4} * 2} = \frac{1}{2}$$