12 Марковские цепи

12.1 Определение

Марковской цепью называется следующая вероятностная модель:

1. В каждый момент времени модель может находиться в одном из n состояний: $\{S_1, \ldots, S_n\}$. Иногда одно из состояний определено как начальное.

2. Для каждой пары состояний S_i и S_j определены вероятности перехода $p_{i,j}$ из состояния S_i в состояние S_j, такие что:

$$\sum_{j=1}^{n} p_{i,j} = 1$$

Замечание: некоторые из чисел $p_{i,j}$ могут равняться нулю. По сути, это будет означать, что переход из состояния S_i в состояние S_j невозможен.

Марковскую цепь можно задать ориентированным графом. Вершины графа будут соответствовать состояниям цепи. Далее, для простоты, вершины будет обозначать также, как соответствующие им состояния. Если число $p_{i,j} > 0$, то проводим в графе ребро от вершины S_i к вершине S_j, и приписываем данному ребру число $p_{i,j}$. Если $p_{i,j} = 0$, то ребро от вершины S_i к вершине S_j не проводим. Полученный граф, называется **графом переходов марковской цепи**.

Также марковскую цепь можно задать с помощью матрицы размером $n \times n$, в которой на месте (i, j) стоит число $p_{i,j}$. Полученная матрица называется **матрицей переходов марковской цепи**.

Граф переходов марковской цепи удобен для визуального представления работы марковской цепи. Матрица переходов удобна для проведения различных вычислении, связанных с марковской цепью.

Марковская цепь моделирует вероятностный процесс, который разворачивается в дискретном времени. Дискретность времени означает, что оно течет по тактам: существует первый момент времени, второй момент, третий и т.д.

В первый момент времени система находится в начальном состоянии. Далее за каждый такт система переходит из текущего состояния в следующее. При этом следующее состояние определяется случайным образом в соответствии с вероятностям перехода.

Рассмотрим следующую игру. Игрок бросает игральный кубик. Если выпадает 1, 2 или 3, то игрок бросает кубик еще раз по тем же правилам.

Если выпадает 4 или 5, то игрок проигрывает. Если выпадает 6, то игрок бросает монетку.

Если игрок бросает монетку и выпадает орел, то игрок выигрывает, если выпадает решка, то игрок снова бросает кубик уже по описанным правилам.

Представим данную игру в виде марковской цепи. Цепь будет иметь четыре состояния:

- Состояние S_1 - бросание кубика.
- Состояние S_2 - бросание монетки.
- Состояние S_3 - проигрыш.
- Состояние S_4 - выигрыш.

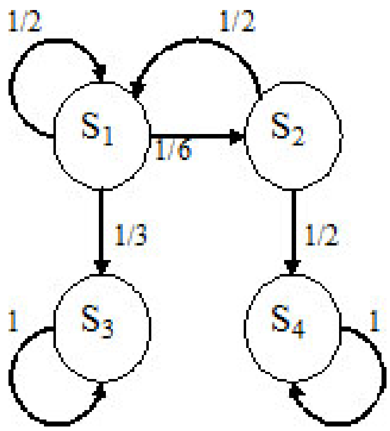

Рис. 1: Граф переходов марковской цепи

При бросании кубика вероятность выпадения 1, 2 или 3 равно $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, поэтому $p_{1,1} = \frac{1}{2}$.

При бросании кубика вероятность выпадения 4 или 5 равно $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, поэтому $p_{1,3} = \frac{1}{3}$.

При бросании кубика вероятность выпадения 6 равно $\frac{1}{6}$, поэтому $p_{1,2} = \frac{1}{6}$.

При бросании кубика игрок не может выиграть, следовательно переход из S_1 в S_4 невозможен, поэтому $p_{1,4} = 0$

При бросании монетки вероятность выпадения орла равна $\frac{1}{2}$, поэтому $p_{2,4} = \frac{1}{2}$.

При бросании монетки вероятность выпадения решки равна $\frac{1}{2}$, поэтому $p_{2,1} = \frac{1}{2}$.

Т.к. из состояния S_2 нельзя перейти в состояния S_2 или S_3, поэтому $p_{2,2} = p_{2,3} = 0$

Если игрок проиграл, то игра заканчивается. В рамках марковской цепи мы можем определить, что вероятность перехода из S_3 в S_3 равно 1, поэтому $p_{3,3} = 1$ и $p_{3,1} = p_{3,2} = p_{3,4} = 0$. Можно сказать, что состояние S_3 является **поглощающим**, и при попадании в данное состояние, система остается в нем во все последующие такты времени.

Аналогично, если игрок выиграл, то вероятность перехода из S_4 в S_4 равно 1, поэтому $p_{4,4} = 1$ и $p_{4,1} = p_{4,2} = p_{4,3} = 0$.

Граф переходов данной марковской цепи представлен на Рис. 1.

Матрица переходов данной марковской цепи следующая:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

12.2 Свойства матрицы переходов марковской цепи

Рассмотрим марковскую цепь, которая описывает изменения в состоянии погоды.

Предположим, что из статистических наблюдений мы сделали следующий вывод. Если сегодня ясная погода, то вероятность того, что завтра будет ясная погода равна $\frac{1}{2}$, и вероятность того, что завтра будет дождь также $\frac{1}{2}$. Если сегодня дождь, то вероятность того, что завтра будет ясная погода равна $\frac{1}{3}$, и вероятность того, что завтра будет дождь равна $\frac{2}{3}$.

Обозначим S_1 - состояние ясной погоды и S_2 - состояние дождя.

Марковская модель для данной марковской цепи имеет граф переходов изображенный на Рис 2.

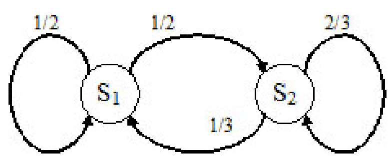

Рис. 2: Марковская цепь изменения погоды

Матрица переходов для данной марковской следующая:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Марковская цепь явным образом описывает, как изменяется система за один такт времени.

Поставим вопрос: а можем ли мы узнать какие изменения произойдут за два (или вообще за n) такта времени. Например, если мы знаем, что сегодня ясно, то с какой вероятностью ясная погода будет через 2 дня (или через n дней)? Другими словами, может ли марковская цепь дать пролонгированный прогноз, а не только на один такт времени?

"Развернем"процесс во времени (Рис. 3).

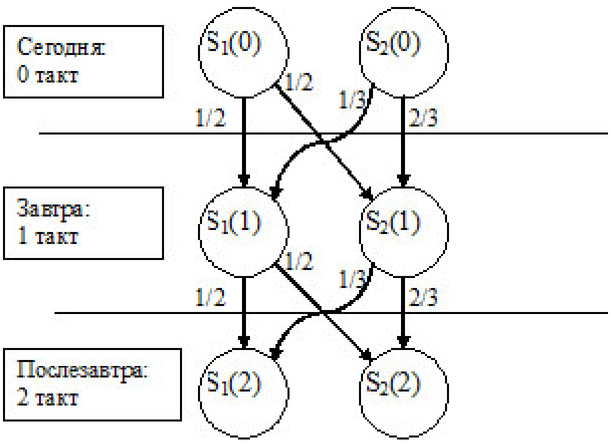

Рис. 3: 2 такта работы марковской цепи

Через $S_1(t)$ обозначим состояние ясной погоды в момент времени t, через $S_2(t)$ обозначим состояние дождя в момент времени t.

Предположим мы начальный (нулевой) момент времени мы находимся в состоянии $S_1(0)$. В состояние $S_1(2)$ мы можем попасть двумя путями:

1. $S_1(0) \to S_1(1) \to S_1(2)$. Это означает: сегодня - ясно, завтра - ясно, послезавтра - ясно.

2. $S_1(0) \to S_2(1) \to S_1(2)$. Это означает: сегодня - ясно, завтра - дождь, послезавтра - ясно.

Первый вариант описывается тем, что **одновременно** происходят два **независимых** события:

1) погода была ясной, и на следующей день погода ясная.

2) погода была ясной, и на следующей день погода ясная.

Заметим, что когда мы говорим "одновременно"мы не имеем в виду такты работы модели, т.к. первое случилось на первом такте, а второе на втором. Мы имеем в виду, что в итоге случилось и первое, и второе событие.

Вероятность каждого из этих событий равна $\frac{1}{2}$, поэтому вероятность того, что оба эти события произошли одновременно равно $\frac{1}{2} * \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

Второй вариант описывается тем, что **одновременно** произойти два **независимых** события:

1) сегодня погода была ясной, а на следующей день - дождливая.

2) сегодня погода была была дождливая, а на следующий день - ясная.

Вероятность первого события равна $\frac{1}{2}$, вероятность второго события равна $\frac{1}{3}$, поэтому вероятность того, что оба эти события произошли одновременно равно $\frac{1}{2} * \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

Описанные варианты $S_1(0) \to S_1(1) \to S_1(2)$ и $S_1(0) \to S_2(1) \to S_1(2)$ являются **несовместными**, т.е. происходит или первый вариант, или второй, но не оба сразу. И других вариантов попадания из $S_1(0)$ в $S_1(2)$ нет. Поэтому, вероятность перехода из $S_1(0)$ в $S_1(2)$ равна

$$\frac{1}{2} * \frac{1}{2} + \frac{1}{2} * \frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$$

.

Аналогичным образом можно найти что:

1. Вероятность перехода из $S_1(0)$ в $S_2(2)$ равна

$$\frac{1}{2} * \frac{1}{2} + \frac{1}{2} * \frac{2}{3} = \frac{1}{4} + \frac{2}{6} = \frac{7}{12}$$

.

2. Вероятность перехода из $S_2(0)$ в $S_1(2)$ равна

$$\frac{1}{3} * \frac{1}{2} + \frac{2}{3} * \frac{1}{3} = \frac{1}{6} + \frac{2}{9} = \frac{7}{18}$$

.

3. Вероятность перехода из $S_2(0)$ в $S_2(2)$ равна

$$\frac{1}{3} * \frac{1}{2} + \frac{2}{3} * \frac{2}{3} = \frac{1}{6} + \frac{4}{9} = \frac{11}{18}$$

.

В результате, мы получили вероятности переходов, которые полностью описывают смену погоды за два такта работы нашей модели. Не трудно видеть, что произведенные вычисления в точности соответствуют возведению матрицы переходов марковской цепи в квадрат. Действительно:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} * \frac{1}{2} + \frac{1}{2} * \frac{1}{3} & \frac{1}{2} * \frac{1}{2} + \frac{1}{2} * \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} * \frac{1}{2} + \frac{2}{3} * \frac{1}{3} & \frac{1}{3} * \frac{1}{2} + \frac{2}{3} * \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{12} & \frac{7}{12} \\ \frac{7}{18} & \frac{11}{18} \end{pmatrix}$$

Аналогичным образом можно доказать, что переходы которые происходят в марковской цепи за n тактов времени соответствует возведению матрицы переходов марковской цепи в степень n.

Данное свойство дает еще один аргумент в пользу того, почему умножение матриц устроено именно так как устроено. Этот вопрос задавался на первой лекции. В частности потому, что данная операция умножения позволяет применять теорию матриц для марковских цепей.